Badanie Funkcji

Paweł Gosk i Konrad Topolski

$$\xi(x) = (x - \frac{3}{x})e^{\frac{-2}{x}}$$

1. **Dziedzina funkcji:** $x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$

   - Badanie funkcji ξ w punkcie $x = 0$

$$\lim_{x \to 0^-} (x - \frac{3}{x})e^{-\frac{2}{x}} = \lim_{x \to 0^-} (x - \frac{3}{x}) \cdot \lim_{x \to 0^-} e^{-\frac{2}{x}} = -\infty \cdot (-\infty) = \infty \quad (1)$$

$$\lim_{x \to 0^+} (x - \frac{3}{x})e^{-\frac{2}{x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x - \frac{3}{x}}{e^{\frac{2}{x}}} \stackrel{H}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{1 + \frac{3}{x^2}}{\frac{-2}{x^2} e^{\frac{2}{x}}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 + 3}{-2e^{\frac{2}{x}}} = \frac{3}{-\infty} = 0 \quad (2)$$

2. **Punkty charakterystyczne:**

   - Miejsca zerowe $\xi(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{3} \vee x = -\sqrt{3}$
   - Granice w $\pm\infty$

$$\lim_{x \to \infty} \xi(x) = \infty \quad (3)$$

$$\lim_{x \to -\infty} \xi(x) = -\infty \quad (4)$$

3. **Asymptoty**

   - Asymptota pionowa: $x = 0$
   - Ponieważ granice w nieskończonościach są nieskończone, asymptoty poziome nie istnieją.

- Asymptoty ukośne:

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{(x - \frac{3}{x})e^{-\frac{2}{x}}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 3}{x^2} e^{-\frac{2}{x}} = \lim_{x\to\infty} (1 - \frac{3}{x^2})e^{-\frac{2}{x}} = 1 \tag{5}$$

$$\begin{gathered} b = \lim_{x\to\pm\infty} (x - \frac{3}{x})e^{-\frac{2}{x}} - x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2e^{-\frac{2}{x}} - x^2 - 3e^{-\frac{2}{x}}}{x} = \\ \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2(e^{-\frac{2}{x}-1)}}{x} - \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(3e^{-\frac{2}{x}}) \to 1}{x \to \pm\infty} = \lim_{x\to\pm\infty} x(e^{-\frac{2}{x}} - 1) = \\ \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{-\frac{2}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{0}{0}\right] \stackrel{H}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(\frac{2}{x^2})e^{-\frac{2}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\pm\infty} -2e^{-\frac{2}{x}} = -2 \end{gathered} \tag{6}$$

Można skorzystać z reguły de l'Hospitala, ponieważ funkcje są określone i mają ciągłe pochodne.

Istnieje obustronna asymptota ukośna:

$$y = x - 2$$

- Miejsce przecięcia się $\xi(x)$ i asymptoty ukośnej
  - Sprawdzamy, czy funkcja i asymptota przecinają się:

$$\frac{x^2 - 3}{x} e^{-\frac{2}{x}} = x - 2$$
$$\frac{x^2 - 3}{x} e^{-\frac{2}{x}} - x + 2 = 0$$

Rozwiązanie analityczne nie istnieje!

  - **Metoda stycznych Newtona**
    Założenia:
    * Funkcja jest ciągła.
    * W przedziale $[a, b]$ znajduje się dokładnie jeden pierwiastek.
    * Funkcja ma różne znaki na końcach przedziału.
    * Pierwsza i druga pochodna mają stały znak w tym przedziale.

$$g(x) = \frac{x^2 - 3}{x} e^{-\frac{2}{x}} - x + 2 = 0$$

Numerycznie: pierwsze "zgadnięcie" $\rightarrow x_0 = 3$

$g(3) \cong 0.02 \quad g'(3) = -0.087$

Kolejne przybliżenia metodą stycznych Newtona

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\xi(x_k)}{\xi'(x_k)}$$

$$x_1 = 3 - \frac{0.02}{-0.087} = 3 + 0.229 = 3.229$$

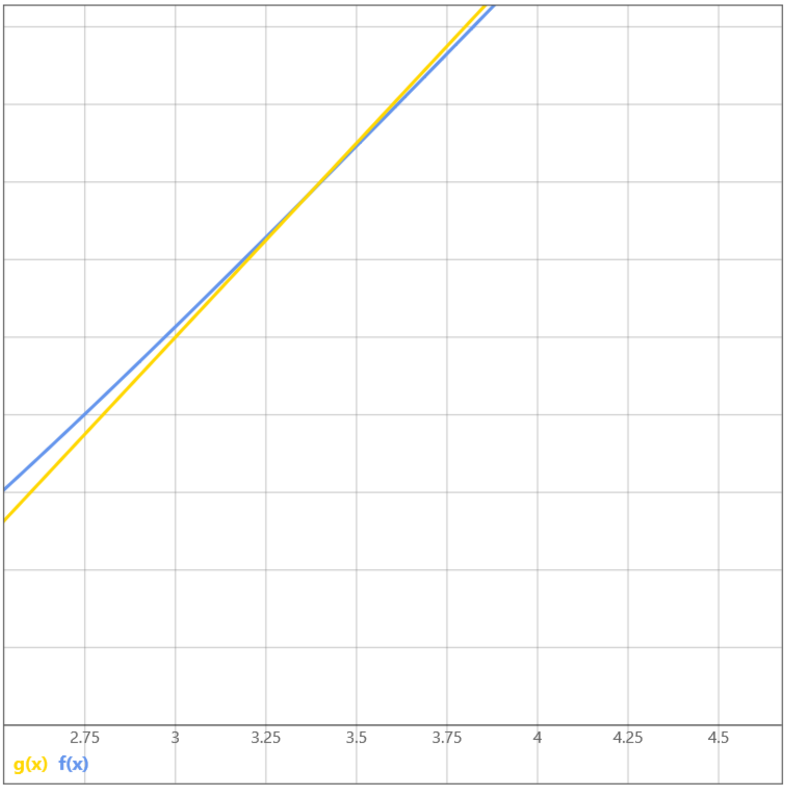
$g(3.229) = 0.0089\ldots$

$g'(3.229) = -0,6937$

$x_2 = 3.35\ldots \quad x_3 = 3.36\ldots$

Miejsce przecięcia $\xi(x)$ **z** $y = x - 2$ **:**

$$x \approx 3.36$$

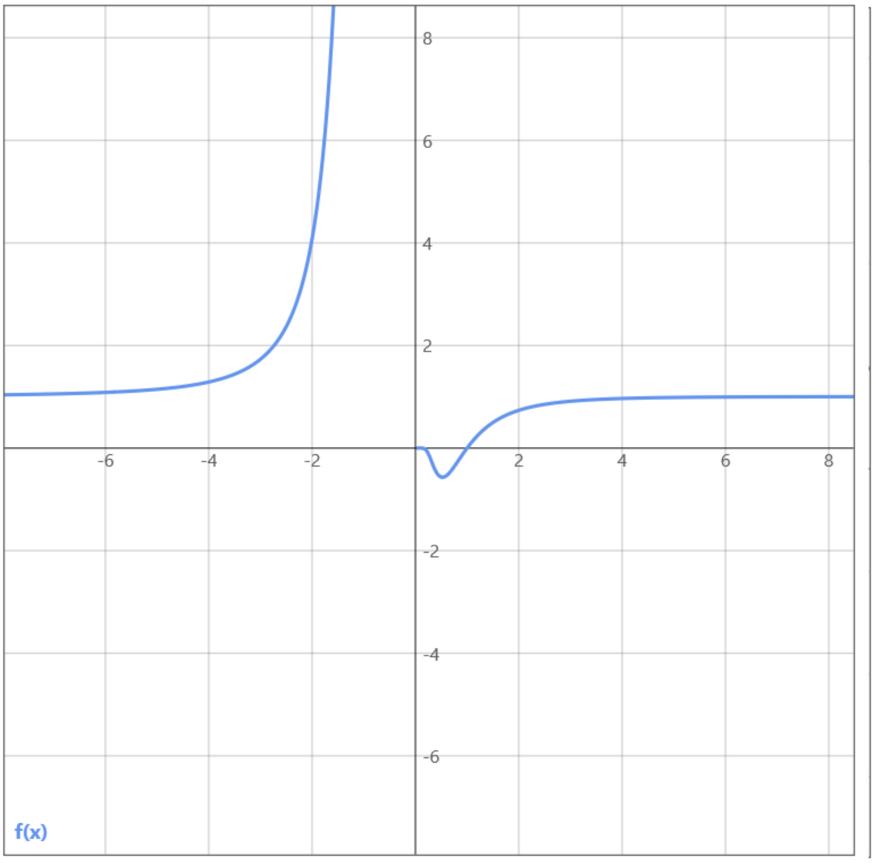


Rysunek 1: Punkt przecięcia $\xi(x)$ z asymptotą

4. **Pierwsza pochodna** $\xi(x)$: $D\xi'$: $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

$$\xi'(x) = \Big((x - \frac{3}{x})e^{-\frac{2}{x}}\Big)' = (x - \frac{3}{x})'e^{-\frac{2}{x}} + \\ + (x - \frac{3}{x})(e^{-\frac{2}{x}})' = (1 + \frac{3}{x^2})e^{-\frac{2}{x}} + \frac{2}{x^2}(x - \frac{3}{x})e^{-\frac{2}{x}} = \\ e^{-\frac{2}{x}}(1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{6}{x^3}) = \frac{e^{-\frac{2}{x}}}{x^3}(x-1)(x^2+3x+6) \tag{7}$$

Punkt podejrzany o ekstremum: $\xi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$



Rysunek 2: $\xi'(x)$

$$\begin{aligned} &\xi'(x) \nearrow &&\longleftrightarrow \; x \in]-\infty, 0[\cup [1, \infty[\\ &\xi'(x)_{const} &&\longleftrightarrow x \in \emptyset \\ &\xi'(x) \searrow &&\longleftrightarrow \; x \in]0, 1] \end{aligned}$$

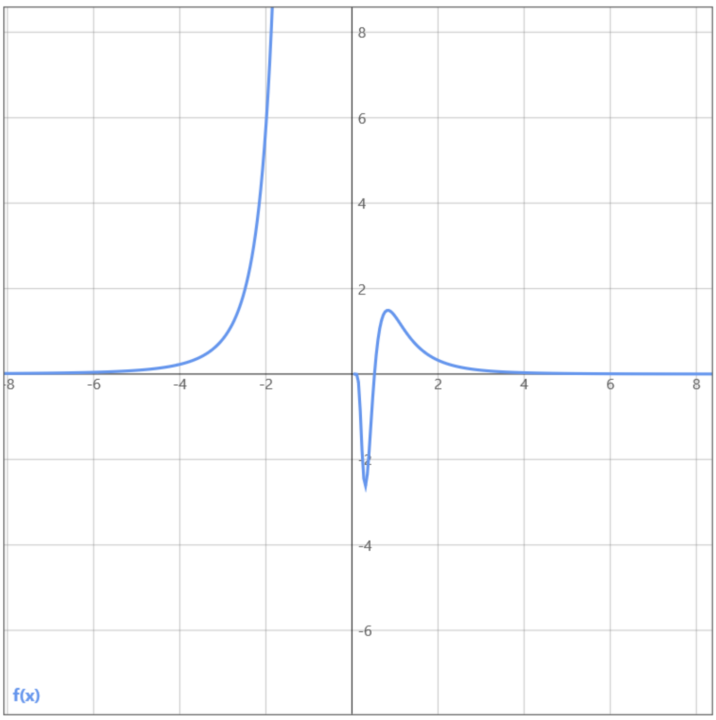
$\xi'(1) \to (\searrow\nearrow)$ więc $\xi(1) = \frac{-2}{e^2} \approx -0.27)$ jest minimum funkcji.

5. **Poszukiwanie punktów przegięcia. Druga pochodna** $\xi(x)$:
$D\xi''$: $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

$$\begin{aligned}\xi''(x) &= \left[e^{-\frac{2}{x}}\left(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}-\frac{6}{x^3}\right)\right] = e^{-\frac{2}{x}}\left(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}-\frac{6}{x^3}\right)'+\\ &+e^{-\frac{2}{x}}\left(\frac{2}{x^2}\right)\left(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}-\frac{6}{x^3}\right) = e^{-\frac{2}{x}}\left[\frac{18}{x^4}-\frac{6}{x^3}-\frac{2}{x^2}\right]+\\ &+e^{-\frac{2}{x}}\left[\left(\frac{2}{x^2}\right)\left(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}-\frac{6}{x^3}\right)\right] = \frac{-2e^{-\frac{2}{x}}}{x^5}(x^2-12x+6)\end{aligned} \tag{8}$$

Punkty przegięcia:

$$\begin{aligned}&\xi''(x) = 0\\ &\frac{-2e^{-\frac{2}{x}}}{x^5}(x^2-12x+6) = 0\\ &-2x^5[x^2-12x+6] = 0\\ &x^5(x-(6+\sqrt{30})(x-(6-\sqrt{30}) = 0\\ &x = 0 \notin D_{\xi''} \quad x{=}6{+}\sqrt{30} \quad x = 6-\sqrt{30}\end{aligned}$$



Rysunek 3: $\xi''(x)$

$\xi''(x) \nearrow \quad \longleftrightarrow \quad x \in]-\infty, 0[\cup [6-\sqrt{30}, 6+\sqrt{30}[\quad \rightarrow \quad \xi(x)$ wypukła

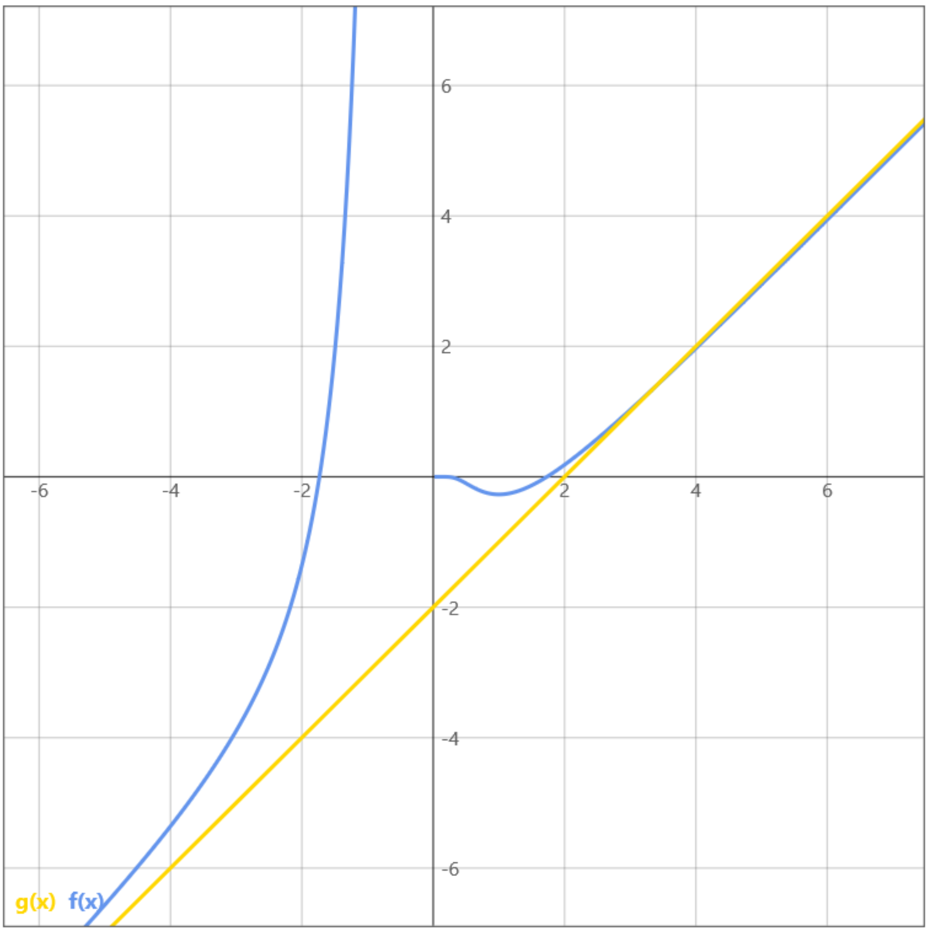
$\xi''(x) \searrow \quad \longleftrightarrow \quad x \in]0, 6-\sqrt{30}[\cup [6+\sqrt{30}, \infty[\quad \rightarrow \quad \xi(x)$ wklęsła

Obserwacja:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \xi''(x) = \lim_{x\to\pm\infty} e^{-\frac{2}{x}} \frac{x^2(-2+\frac{24}{x}-\frac{12}{x^2})}{x^5} = 0$$

Co oznacza, że w nieskończoności funkcja nie zmienia swojej wypukłości

6. **Funkcja $\xi(x)$ i jej asymptota $g(x)$**



Rysunek 4: $\xi(x)$